

УДК 681.51

Супрунцова Ю.А.

Одесский национальный политехнический университет

Брунеткин А.И.

Одесский национальный политехнический университет

АНАЛИЗ ВОЗМОЖНОСТИ ПРЯМОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ УСЛОВНОЙ ФОРМУЛЫ ГОРЮЧЕГО ПЕРЕМЕННОГО СОСТАВА

В статье рассмотрен анализ возможности прямого решения задачи определения условной формулы горючего переменного состава, который не ставит целью разработку математических методов решения систем нелинейных уравнений, обладающих какими-либо особенностями. Тем не менее необходим хотя бы краткий анализ возможных причин возникших трудностей. Задачей является поиск инженерных методов их преодоления с целью получения необходимых решений.

Ключевые слова: линейные уравнения, продукты сгорания, состав горючего, метод Ньютона-Рафсона.

Постановка проблемы. Разработанная в предыдущей статье «Модель расчета переменного состава газообразного горючего» модель является системой нелинейных алгебраических уравнений. Возможный метод ее решения – метод Ньютона. Его применение для задачи определения температуры продуктов сгорания при известном составе топлива (назовем эту задачу **прямой**) дает сходящееся решение. Но попытка применения его для решения задачи определения состава горючего на основе модели, разработанной в предыдущей статье «Модель расчета переменного состава газообразного горючего» (назовем эту задачу **обратной**), положительного результата не дала. Не удалось получить подобным образом и решения в более простом случае углеводородного горючего (без содержания в своем составе кислорода как химического элемента). В последнем случае в качестве модельного горючего рассматривался метан (CH_4). Углеводородное горючее выбрано по причине совпадения его состава продуктов сгорания по сравнению со случаем сжигания кислородсодержащего горючего. Различие касается только количества определяемых величин и, следовательно, количества уравнений. Так состав углеводородного горючего определяется только двумя величинами b_C и b_H в условной формуле горючего $C_{b_C} H_{b_H}$, а кислородсодержащего углеводородного горючего – тремя: b_C , b_H , b_O в условной формуле $C_{b_C} H_{b_H} O_{b_O}$.

Изложение основного материала исследования. Используемый способ решения является широко применяемым в инженерных приложениях методом Ньютона-Рафсона, также известным как метод касательных – это итерационный

численный метод нахождения корня (нуля) заданной функции. Метод был впервые предложен английским физиком, математиком и астрономом Исааком Ньютоном. Поиск решения осуществляется путём построения последовательных приближений и основан на принципах простой итерации. Метод обладает квадратичной сходимостью. Модификацией метода является метод хорд и касательных. Также метод Ньютона может быть использован для решения задач оптимизации, в которых требуется определить ноль первой производной либо градиента в случае многомерного пространства.

Иллюстрация метода Ньютона представлена на рисунке 1 (синим изображена функция $f(x)$, ноль которой необходимо найти, красным – касательная в точке очередного приближения x_n). Здесь мы можем увидеть, что последующее приближение x_{n+1} лучше предыдущего x_n .

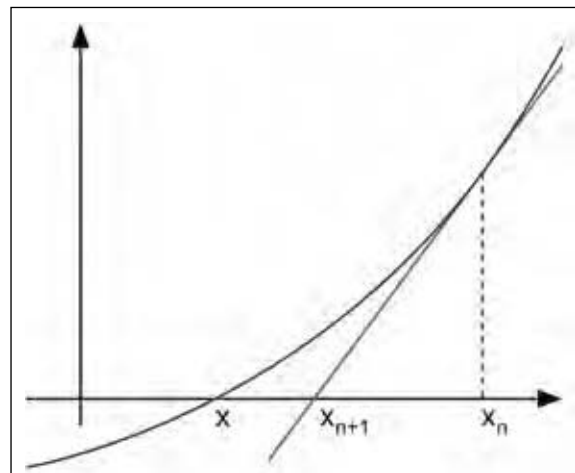


Рис. 1. Иллюстрация метода Ньютона

В процессе поиска причин возникновения сбоя в процессе решения была проанализирована система линейных уравнений, образующаяся при линеаризации исходной нелинейной системы. Вычисление ее определителя во всех рассматриваемых случаях дало конечную величину. Это свидетельствует о не вырожденности системы и, следовательно, о корректности модели, а также о теоретической возможности получить сходящееся решение.

Для определения причины неустойчивости численного процесса при попытке получить решение исходной нелинейной системы уравнений рассмотрим обусловленность матрицы линеаризованной системы, характеризующей чувствительность ее решения к малым изменениям коэффициентов. В [1] отмечается: «Широко распространено заблуждение, что малость $\det(A)$ влечет за собой плохую обусловленность матрицы A ». Далее, «... значение $\text{cond}(A)$ является гораздо более важным критерием трудности решения линейной системы $Ax=b$, чем малость $\det(A)$, либо громадность порядка n ».

Определим число обусловленности квадратной матрицы как:

$$\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|. \quad (1)$$

Здесь $\|A\|$ и $\|A^{-1}\|$ – нормы соответственно исходной и обратной матриц линеаризованной системы уравнений рассматриваемой модели.

Число обусловленности матрицы зависит от выбора нормы. Но если матрица хорошо обусловлена, то её число обусловленности будет мало при любом выборе, а если она плохо обусловлена, то её число обусловленности будет велико при любом выборе нормы. Обычно норму выбирают исходя из соображений удобства. На практике наиболее широко используют 1-норму, 2-норму и ∞ -норму. Для вычислений выберем последнюю, определяемую в виде максимальной суммы модулей элементов каждой из строк матрицы:

$$\|A\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad (2)$$

Таким образом, в конечном варианте число обусловленности будем определять исходя из соотношения:

$$\text{cond}(A) = \|A\|_{\infty} \cdot \|A^{-1}\|_{\infty}. \quad (3)$$

Обусловленность оценивает близость матрицы коэффициентов A к вырожденной. Число обусловленности $\text{cond}(A)$ является количественной оценкой обусловленности. Отметим, что всегда $\text{cond}(A) \geq 1$. Если $\text{cond}(A) \geq 10^3$, то говорят, что матрица A плохо обусловлена. Если $1 \leq \text{cond}(A) \leq 100$, то матрица считается хорошо обусловленной.

На основании вышеизложенного определение обусловленности системы линеаризованных уравнений было выполнено для двух типов горючего, сжигаемого в воздухе:

1. для более простого углеводородного горючего (на примере метана CH_4);

2. для более сложного кислородсодержащего углеводородного горючего (на примере этилового спирта $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$).

Для каждого типа горючего было рассмотрено по два варианта:

a. при решении прямой задачи (определение температуры продуктов сгорания при известном составе горючего);

b. при решении обратной задачи (определение состава горючего по измеренным технологическим параметрам – соотношению расходов горючего и воздуха и температуре продуктов сгорания).

Как ранее отмечено в вариантах **1.a** и **2.a**, получено устойчивое решение исходных систем нелинейных уравнений. В то время, как в вариантах **1.b** и **2.b** решения получить не удалось.

Для варианта **1.a** величина $\text{cond}(A)$ вычислена для двух случаев:

1.a.1) $\text{cond}(A)=540$ – для момента исходного (начального) приближения;

1.a.2) $\text{cond}(A)=1390$ – для момента окончания решения, когда коэффициенты системы линеаризованных уравнений более не изменяются.

Подобная картина получена и для варианта **2.a**:

2.a.1) $\text{cond}(A)=73$ – для момента исходного (начального) приближения;

2.a.2) $\text{cond}(A)=230$ – для момента окончания решения, когда коэффициенты системы линеаризованных уравнений более не изменяются.

Для рассмотренных вариантов **1.a** и **2.a** значения $\text{cond}(A)$ получены разные, но тенденции одинаковы. Число обусловленности систем близка или более 100 и увеличивается по мере приближения к решению. Причиной этому служит то, что по мере приближения к решению разность между предыдущим приближением и рассчитанным текущим уменьшается. При этом возрастает влияние погрешности вычисления коэффициентов матрицы линеаризованной системы уравнений. Значительная величина $\text{cond}(A)$ потребовала для обеспечения сходимости процесса вычисления применения на каждой итерации коэффициента нижней релаксации (0.5). Такой подход в рассмотренных случаях позволил получить адекватные решения.

Иная ситуация для вариантов **1.b** и **2.b**. Вычисление $\text{cond}(A)$ для момента исходного (начального) приближения дало следующие величины:

для **1.b** $\text{cond}(A)=5200$;
 для **2.b** $\text{cond}(A)=110000$.

Столь значительные величины чисел обусловленности объясняют отсутствие сходящегося решения для вариантов **1.b** и **2.b**, соответствующих интересующей нас задаче. Как показали расчеты для вариантов **1.a** и **2.a**, следует учитывать еще большее увеличение величин $\text{cond}(A)$ по мере итерационного приближения к решению.

Плохая обусловленность систем линеаризованных уравнений, используемых в итерационном процессе решения исходных систем нелинейных уравнений, отражает высокую чувствительность получаемых приближений к точности вычислений коэффициентов матриц и свободных членов. Проблема может быть решена путем задания более точных начальных приближений. Причем, чем хуже обусловленность, тем точнее должно быть начальное приближение определяемых величин. В их качестве выступают парциальные давления продуктов сгорания и количество атомов химических элементов в условной формуле горючего. Но природа решаемой задачи не позволяет сделать это. Количество атомов в процессе решения может непредсказуемо меняться.

Приведенные выше расчеты касаются видов горючих, состоящих не более чем из трех хими-

ческих элементов $C_{b_c} H_{b_H} O_{b_o}$. Еще меньше вероятность получения решения прямым использованием метода Ньютона-Рафсона при добавлении в состав условной формулы горючего дополнительных химических элементов, например азота (N), серы (S).

Существуют и другие методы, используемые при решении систем нелинейных уравнений. Например, метод простой итерации, метод Зейделя. Но они могут сходиться еще медленнее, чем метод Ньютона. Кроме того, как и в рассмотренном выше случае, для них одной из наиболее трудных проблем является локализация решения (выбор начального приближения).

Выводы. Плохая обусловленность систем линейных уравнений, возникающих при решении исходной модели, не позволяет получить сходящегося итерационного процесса. Может быть предложен метод решения исходной модели на основе заранее сформированной базы возможных составов горючего. Эта база включает данные многократного хорошо сходящегося решения прямой задачи определения температуры продуктов сгорания при всевозможных комбинациях видов условной формулы горючего и соотношения горючего и окислителя (воздуха).

Список литературы:

1. Форсайт Дж., Молер К. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений: пер. с англ. М.: Мир, 1969. 168 с.
2. Сайт подразделения «GE Energy» компании General Electric. URL: http://www.ge-energy.com/products_and_services/products/gas_engines_power_generation/gas_engines_jenbacher_type_2.jsp
3. Казаринов Л.С., Кинаш А.В. Способ экстремальной автоматической системы регулирования процессами горения в топке парового котла при использовании смеси газов. Материалы 67-й научно-технической конференции: ГОУ ВПО «МГТУ». Магнитогорск 2009 г. Т. 2. С. 138 – 139.
4. Межгосударственный стандарт ГОСТ 31371.6-2008 (ИСО 6974-6:2002) Газ природный. Определение состава методом газовой хроматографии с оценкой неопределенности. Часть 6. Определение водорода, гелия, кислорода, азота, диоксида углерода и углеводородов C1–C8 с использованием трех капиллярных колонок. Москва, 2009.
5. Дорофеев А.А. Основы теории тепловых ракетных двигателей. (Общая теория ракетных двигателей). Москва, МГТУ им. Баумана, 1999. URL: <http://www.engineer.bmstu.ru/res/dorofeev/MAIN.HTM>
6. Брунеткин А.И., Максимов М.В., Бондарев А.В. Идентификация количественного состава неизвестного газообразного горючего и его продуктов сгорания на основе измеренных технологических параметров процесса сжигания топлива. Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Збірник наукових праць. Серія Енергетичні та теплотехнічні процеси й устаткування. Харьков, НТУ ХПІ, 2014. № 12(1055). 194 с.
7. Расчет основных показателей пожаровзрывоопасности веществ и материалов. Руководство. 2002, 25 с. URL: <http://www.doc01.ru/rukovodstvo-2-1/14>
8. Росляков П.В., Ионкин И.Л., Плешанов К.А. Эффективное сжигание топлива с контролируемым химическим недожогом. Теплоэнергетика. Москва, 2009, №1, стр. 20-23.

АНАЛІЗ МОЖЛИВОСТІ ПРЯМОГО РІШЕННЯ ЗАДАЧІ ВИЗНАЧЕННЯ УМОВНОЇ ФОРМУЛИ ПАЛЬНОГО ЗМІННОГО СКЛАДУ

У статті розглянуто аналіз можливості прямого рішення задачі визначення умовної формули пального змінного складу, який не ставить за мету розробку математичних методів рішення систем нелінійних рівнянь, що володіють будь-якими особливостями. Проте необхідний хоча б короткий аналіз можливих причин труднощів, що виникли. Завданням є пошук інженерних методів їх подолання з метою отримання необхідних рішень.

Ключові слова: лінійні рівняння, продукти згоряння, склад пального, метод Ньютона Рафсона.

ANALYSIS OF THE OPPORTUNITY OF A DIRECT SOLUTION OF THE TASK OF DETERMINING THE CONDITIONAL FORMULA OF A COMBUSTIBLE VARIABLE COMPOSITION

The article considers the analysis of the possibility of directly solving the problem of determining the conditional formula of a fuel of variable composition, which does not aim at the development of mathematical methods for solving systems of nonlinear equations with any features. Nevertheless, at least a brief analysis of the possible causes of the difficulties encountered is necessary. The task is to find engineering methods to overcome them in order to obtain the necessary solutions.

Key words: linear equations, combustion products, fuel composition, Newton Raphson method.